Karlsruher Institut für Technologie

Fakultät für Mathematik
Institut für Algebra und Geometrie
Sommersemester 2017
Prof. Dr. Enrico Leuzinger
Dr. Moritz Gruber
M. Sc. Julia Heller

Lineare Algebra II
Übungsblatt 13

Aufgabe 1 (P)

Im $\mathbb{R}^3$ seien die Quadriken Q und Q_a für $a \in \mathbb{R}$ gegeben durch

$$\begin{aligned} Q: &\quad 0 = x^2 + y^2 - 2z \\ Q_a: &\quad -4 = (a+3)x^2 + 5y^2 + z^2 - 4xy + 2xz - 4yz - 2x - 4y. \end{aligned}$$

a) Bestimmen Sie alle $a \in \mathbb{R}$, für die Q und Q_a affin äquivalent sind.

b) Geben Sie für $a = -2$ eine Affinität Φ an, die Q auf Q_{-2} abbildet.

Aufgabe 2 (P)

Im affinen Raum $\mathbb{R}^3$ sei für jedes $a \in \mathbb{R}$ eine Quadrik Q_a gegeben durch

$$a(x_2-1)^2 + a(a-1)x_3^2 + 4x_1x_2 + 2x_1 = 0.$$

Bestimmen Sie die Sylvesterform und den Typ von Q_a und geben Sie eine Affinität $\Phi_a : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ an, die Q_a in die Sylvesterform überführt.

Aufgabe 3 *(alte Klausuraufgabe)*

Es sei $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ gegeben und $M \in \mathbb{C}^{(2n)\times(2n)}$ die Blockmatrix $M = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ A & 0 \end{pmatrix}$. Mit $\widetilde{M}$ bezeichnen wir die Jordansche Normalform von M.

a) Welche Eigenwerte hat M?

b) Wie lang sind die längsten Jordankästchen in $\widetilde{M}$?

c) Bestimmen Sie $\widetilde{M}$ in Abhängigkeit vom Rang von A.

d) Bestimmen Sie für $n = 2$ und $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ eine Basiswechselmatrix $S \in \mathrm{GL}_4(\mathbb{C})$ mit $S^{-1}MS = \widetilde{M}$.

Aufgabe 4 *(alte Klausuraufgabe)*

Im $\mathbb{R}^3$ mit Standardskalarprodukt sei Φ_1 die Drehung um den Winkel $\frac{\pi}{2}$ mit Drehachse $\langle e_1 \rangle$ und Φ_2 die Drehung um den Winkel $\frac{\pi}{2}$ mit Drehachse $\langle e_3 \rangle$.

a) Geben Sie die Abbildungsmatrizen von Φ_1, Φ_2 und $\Phi_1 \circ \Phi_2$ bzgl. der Standardbasis an.

b) Bestimmen Sie die euklidische Normalform $\widetilde{A}$ von

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

sowie eine Matrix $S \in O(n)$, sodass $S^T A S = \widetilde{A}$.

Abgabe der Lösungen bis zum 28.07.2017 um 12 Uhr in den entsprechenden **gelben Briefkasten Ihres Tutoriums im Atrium des Kollegiengebäudes Mathematik (20.30)**. Bitte **heften Sie Ihre Abgabe ordentlich zusammen** und **vermerken Sie Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer** auf jedem Blatt. Jede (P)-Aufgabe wird mit **maximal 6 Punkten** bewertet.